

## Übersicht: Lösen von Gleichungen

1. Lineare Gleichungen
2. Quadratische Gleichungen
3. Bruchgleichungen
4. Wurzelgleichungen
5. Exponentialgleichungen
6. Logarithmusgleichungen

Bsp.

$$3x + 7 = 8x - 5$$

$$x^2 - 8x + 4 = 9x - 3$$

$$\frac{8-x}{7+x} - \frac{7+x}{x^2} = 5$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-4} = 3$$

$$3^x - 5^{x^2+1} = 4$$

$$\ln(3+x) + \ln(x^2) = 4$$

## 1. Lineare Gleichungen

Bsp.

$$a) \quad 3x + 2 = 5x - 2 \quad | -2$$

$$3x = 5x - 4 \quad | -5x$$

$$-2x = -4 \quad | :(-2)$$

$$x = 2$$

$$b) \quad \sqrt{3}x + 0,2x = 5$$

$$1,73x + 0,2x = 5$$

$$1,93x = 5 \quad | : 1,93$$

$$x = 2,59$$

11b

$$\begin{aligned} \text{c) } ax - a &= bx - b && | +a \\ ax &= bx - b + a && | -bx \\ ax - bx &= -b + a \\ (a-b)x &= a-b && | : (a-b) \\ x &= \frac{a-b}{a-b} \end{aligned}$$

$$x = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \epsilon^2 x - 1 &= x + \epsilon && | +1 - x \\ \epsilon^2 x - x &= \epsilon + 1 \\ (\epsilon^2 - 1)x &= \epsilon + 1 && | : (\epsilon^2 - 1) \end{aligned}$$

$$x = \frac{\epsilon + 1}{\epsilon^2 - 1}$$

$$x = \frac{\cancel{\epsilon + 1}}{(\epsilon - 1)\cancel{(\epsilon + 1)}}$$

$$x = \frac{1}{\epsilon - 1}$$

Einschub: Textaufgaben

Bsp.

Der Eisverkäufer Mario betreibt eine Eisdiele. Er zahlt pro Monat 800 € Miete und 300 € für Strom und sonstige Nebenkosten. Eine Eiskugel, die er für 20 Cent herstellt, verkauft er für 70 Cent.

a) Wieviele Eiskugeln muß er pro Monat mindestens verkaufen, um seine Kosten zu decken?

b) Wieviele Eiskugeln muß er pro Monat verkaufen, um einen Gewinn von 500 € zu erzielen?

$$\text{a) } \underbrace{0,7 \cdot x}_{\text{Einnahmen}} = \underbrace{800 + 300 + 0,2x}_{\text{Ausgaben}} \quad | -0,2x$$

$$0,5x = 1100 \quad | :0,5$$

$$x = 2200$$

Mario muß 2200 Eiskugeln verkaufen

$$\text{b) } \underbrace{0,7x}_{\text{Einnahmen}} - \underbrace{(800 + 300 + 0,2x)}_{\text{Ausgaben}} = 500$$

Gewinn

$$0,7x - 800 - 300 - 0,2x = 500 \quad | +800 + 300$$

$$0,5x = 1600 \quad | :0,5$$

$$x = 3200$$

Mario muß 3200 Eiskugeln verkaufen.

A17

Kosten Tarif 1: 10

Kosten Tarif 2:  $5 + 0,2 \cdot x$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } 10 &= 5 + 0,2x & | -5 \\ 5 &= 0,2x & | :0,2 \\ 25 &= x \end{aligned}$$

Die Flatrate lohnt sich ab einer Gesprächszeit von 25 Minuten.

A18

a) Kosten:  $1800 + 2,5x$

Einnahmen:  $8,5x$

$\Rightarrow$  Gewinn = Einnahmen - Kosten

$$= 8,5x - (1800 + 2,5x)$$

$$= 6x - 1800$$

Ansatz: Gewinn = 0

$$6x - 1800 = 0 \quad | +1800 \quad | :6$$

$$x = 300$$

Herr P. muß 300 Pizzen verkaufen

b) Ansatz: Gewinn = 3000

$$6x - 1800 = 3000 \quad | +1800 \quad | :6$$

$$x = 800$$

Herr P. muß 800 Pizzen verkaufen.

## 2. Quadratische Gleichungen

wiederholung: Die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$   
hat die Lösung(en)

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bsp.

$$a) \quad 3x^2 + 5x - 4 = 10x^2 - 7x + 1 \quad | -10x^2 + 7x - 1$$

$$-7x^2 + 12x - 5 = 0 \quad | :(-7)$$

$$x^2 - \frac{12}{7}x + \frac{5}{7} = 0$$

$\frac{p}{q}$

pq-Formel:  $x_{1,2} = -\frac{-\frac{12}{7}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{12}{7}}{2}\right)^2 - \frac{5}{7}}$

$$= \frac{\cancel{12}^6}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \pm \sqrt{\left(-\frac{\cancel{6}^6 \cancel{12}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\right)^2 - \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}}$$

$$= \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36 - 35}{49}}$$

$$= \frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{1}{49}}$$

$$= \frac{6}{7} \pm \frac{1}{7}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{7}$$

A19

$$b) 2x^2 + 4x + 11 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 2x + 5,5 = 0$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 5,5}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-4,5}$$

keine Lösung,  $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$

$$c) 3x^2 - 27 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + 0x - 9 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - (-9)}$$
$$= 0 \pm 3$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

A20

Ansatz:  $x^2 + (x+1)^2 = 1405$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 1405 \quad | -1405$$

$$2x^2 + 2x - 1404 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + x - 702 = 0$$

pq-Formel:  $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-702)}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 702} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2808}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2809}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2809}}{2}
\end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{54}{2} = -27, \quad x_2 = 26$$

fällt weg, da  $x$   
natürliche Zahl sein soll

Die gesuchten Zahlen sind 26 und 27.

### 3. Bruchgleichungen

Ansatz: „So lange mit den Nennern multiplizieren,  
bis keine Brüche mehr da sind“

Bsp.

$$a) \quad \frac{8}{x-1} - \frac{6}{x+2} = \frac{1}{2} \quad | \cdot (x-1)$$

$$8 - \frac{6 \cdot (x-1)}{x+2} = \frac{1}{2} (x-1) \quad | \cdot (x+2)$$

$$8(x+2) - 6 \cdot (x-1) = \frac{1}{2} (x-1)(x+2)$$

$$8x + 16 - 6x + 6 = \frac{1}{2} (x^2 + 2x - x - 2)$$

$$2x + 22 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 23 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$x^2 - 3x - 46 = 0$$

pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-46)}$$
$$= 1,5 \pm 6,95$$

$$x_1 = 8,45, \quad x_2 = -5,45$$

b)  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1 \quad | \cdot (x-1)$

$$1 + \frac{2(x-1)}{x+1} = x-1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$x+1 + 2(x-1) = (x-1)(x+1)$$

$$x+1 + 2x - 2 = x^2 - 1$$

$$-x^2 + 3x = 0 \quad | :(-1)$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x-3) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

A21

c)  $\frac{2x+8}{2x-4} = \frac{7x+4}{4x-2} \quad | \cdot (2x-4)$

$$2x+8 = \frac{(7x+4)(2x-4)}{4x-2} \quad | \cdot (4x-2)$$

$$(2x+8)(4x-2) = (7x+4)(2x-4)$$

$$8x^2 - 4x + 32x - 16 = 14x^2 - 28x + 8x - 16$$

$$8x^2 + 28x - 16 = 14x^2 - 20x - 16$$

$$-6x^2 + 48x = 0$$

$|-6$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x \cdot (x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8$$

$$d) \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\frac{1}{1+x} + 1} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x}{1+x}} = 1$$

$$\frac{\frac{1 - (1+x)}{1+x}}{\frac{1 + 1+x}{1+x}} = 1$$

$$\frac{\frac{-x}{1+x}}{\frac{2+x}{1+x}} = 1$$

$$\frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{2+x} = 1$$

$$\frac{-x}{2+x} = 1$$

$|\cdot (2+x)$

$$-x = 2+x$$

$|-x$

$$-2x = 2$$

$|\cdot (-2)$

$$x = -1$$

*fällt weg (Probe)*

$\Rightarrow$  keine Lösung

$$f) \quad \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{9}{x^2-9} \quad | \cdot (x-3)$$

$$3 - \frac{2(x-3)}{x+3} = \frac{9 \cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} \quad | \cdot (x+3)$$

$$3(x+3) - 2(x-3) = 9$$

$$3x + 9 - 2x + 6 = 9$$

$$x = -6$$